DEVOIR 2. VARIÉTÉS COMPLEXES ET CALCUL DIFFÉRENTIEL

Exercices avec ★ : remettre uniquement ces exercices (Exercices 3, 7, 10, 14, 16).
Exercices avec ★★ : pas à rendre, mais à essayer par vous-même.
Exercices sans ★ : ce sont des exercices standards ; si vous ne les connaissez pas, il est important de les apprendre.

1. Rappel sur les variétés différentielles et le calcul différentiel

Exercice 1. Considérons le 2-tore $\mathbb{T}^2$ et le difféomorphisme local $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ défini par $\Phi(\theta_1, \theta_2) = (e^{2\pi i\theta_1}, e^{2\pi i\theta_2})$.

(a) Donner une condition sur un champ de vecteurs $X \in \Gamma(T\mathbb{R}^2)$ pour que $\Phi_* X$ définisse un champ de vecteurs sur $\mathbb{T}^2$.
(b) En déduire que $T\mathbb{T}^2 \simeq \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$.
(c) Plus généralement, montrez que l'espace tangent d'une variété de dimension n est trivial si et seulement s'il existe n champs de vecteurs partout non nuls et linéairement indépendants en chaque point.

Exercice 2. On définit la n-sphère par $\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$.

(a) Utiliser le théorème des fonctions implicites pour montrer que $\mathbb{S}^n$ est une variété lisse de dimension n.
(b) Montrer que $T\mathbb{S}^n \simeq \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1, \langle x, y\rangle = 0\}$.
(c) Donner un difféomorphisme explicite entre $T\mathbb{S}^{n-1}$ et $\{z \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{j=1}^n z_j^2 = 1\}$.
(d) On note $X \wedge Y$ le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$. Montrer que, pour $X_p, Y_p \in T_p\mathbb{S}^2$, $\omega_p(X_p, Y_p) = \langle p, X_p \wedge Y_p\rangle$ définit une 2-forme fermée non dégénérée sur $\mathbb{S}^2$.

Exercice 3 (*Construction de fibré vectoriel*)**.** ★ Soit M une variété lisse munie d'un recouvrement ouvert $M = \bigcup_{i\in I} U_i$ et soient $\psi_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ des applications lisses satisfaisant la *condition de cocycle*

$$\psi_{ik}(x) = \psi_{ij}(x) \cdot \psi_{jk}(x) \qquad \forall x \in U_i \cap U_j \cap U_k, \tag{cc}$$

(en particulier, $\psi_{ii}(x) = \mathrm{Id}$ et $\psi_{ji}(x) = \psi_{ij}(x)^{-1}$).

(a) Utiliser ces applications ψ_{ij} pour construire un fibré vectoriel E de rang k sur M avec ces cartes de transition.
Indication : considérer l'ensemble $\bigsqcup_i\{(i, x, v) \mid i \in I, x \in U_i, v \in \mathbb{R}^k\}$ et quotienter par une relation adéquate.
(b) Montrer que si l'on se donne un autre système de fonctions de transition $\widetilde{\psi}_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ satisfaisant (cc), le fibré vectoriel obtenu $\widetilde{E}$ est isomorphe (comme fibré) à E si et seulement s'il existe des applications $h_i : U_i \to \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ telles que $\widetilde{\psi}_{ij}(x) = h_i(x)^{-1} \cdot \psi_{ij}(x) \cdot h_j(x)$, $\forall x \in U_i \cap U_j$.
(c) Donner la trivialisation et les cartes de transition du fibré dual E^* en fonction de celles de E.

Exercice 4. Soit M une variété et $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ trois champs de vecteurs.

(a) Montrer que si $[X, W] = 0$ pour tout $W \in \Gamma(TM)$ alors $X \equiv 0$.
(b) Montrer que $\phi_*[X, Y] = [\phi_* X, \phi_* Y]$ pour tout $\phi \in \mathrm{Diffeo}(M)$.
(c) En déduire l'identité de Jacobi $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.
(d) Notons $\phi^X_t, \phi^Y_t \in \mathrm{Diffeo}(M)$ les flots respectifs de X et Y. Montrer que ϕ^X_t et ϕ^Y_s commutent pour tout t, s assez petits si et seulement si $[X, Y] = 0$.

Exercice 5. Soit M une variété et $X \in \Gamma(TM)$ un champ de vecteurs. Nous allons démontrer la formule de Cartan :

$$\mathcal{L}_X = d \circ \iota_X + \iota_X \circ d.$$

(a) Montrer qu'il suffit d'établir la formule de Cartan sur les 0-formes (grâce à la règle de Leibniz).
(b) Démontrer la formule de Cartan sur les 0-formes.
(c) Soient $\alpha \in \Gamma(T^*M)$ une 1-forme et $X, Y \in \Gamma(TM)$. Montrer que $d\alpha(X, Y) = X.\alpha(Y) - Y.\alpha(X) - \alpha([X, Y])$.

Exercice 6 (*Théorème de Frobenius*)**.** ★★ Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Nous allons montrer ce qui suit : soit $D \subset TU$ un sous-fibré de rang non nul $k < n$. Pour tout $p \in U$, il existe une sous-variété $N \subset U$ telle que $p \in N$ et $T_pN = D_p$ si et seulement si

$$\forall X, Y \in \Gamma(D), \quad [X, Y] \in \Gamma(D). \tag{$*$}$$

(a) Montrer que ($*$) est une condition nécessaire.
(b) Soient $X_1, \cdots, X_k \subset \Gamma(D)$ un repère local. Utiliser ($*$) pour construire un repère local $Y_1, \cdots, Y_k \in \Gamma(D)$ tel que $[Y_i, Y_j] \equiv 0$ pour tous i, j.
(c) Conclure.

2. Contexte complexe

Exercice 7. ★ Soit (M, J) une variété presque complexe.

(a) Montrer que le tenseur de Nijenhuis $N_J(X, Y) = \frac{1}{4}([JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y])$ est bien un tenseur (c'est-à-dire $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire).
(b) Montrer que $T^{1,0}M$ est stable par crochet de Lie si et seulement si N_J s'annule identiquement.
(c) En déduire que, pour toute structure presque complexe sur une variété M de dimension (réelle) 2, $T^{1,0}M$ est stable par crochet de Lie.

Exercice 8. Soit (M, J) une variété complexe (c'est-à-dire que J est intégrable). Montrer que $T^{1,0}M$ est (naturellement) un fibré vectoriel holomorphe au-dessus de M.

Exercice 9. Soit (M, J) une variété complexe.

(a) Montrer que $\overline{\partial \alpha} = \bar{\partial}\bar{\alpha}$.
(b) En déduire qu'une (p, p)-forme réelle $\alpha \in \mathcal{A}^{p,p}(M) \cap \mathcal{A}^{2p}(M)$ est $\bar{\partial}$-fermée (resp. exacte) si et seulement si elle est ∂-fermée.
(c) Formuler les lemmes de Poincaré pour ∂ et pour $\bar{\partial}$.

Exercice 10. ★ Soit $f : M \to N$ une application holomorphe entre variétés complexes. Montrer que si α est une (p, q)-forme sur N, alors $f^*\alpha$ est une (p, q)-forme sur M. Donner un exemple où cela échoue si f n'est pas holomorphe. En déduire que f induit un homomorphisme

$$f^* : H^{p,q}_{\bar{\partial}}(N) \to H^{p,q}_{\bar{\partial}}(M)$$

défini par $f^*[\alpha] = [f^*\alpha]$ pour $\alpha \in \mathcal{A}^{p,q}(N)$ avec $\bar{\partial}\alpha = 0$.

Exercice 11. ★★ Considérons l'application naturelle $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n$ définissant $\mathbb{P}^n$. Soit $\alpha \in \mathcal{A}^{p,0}(\mathbb{P}^n)$ une forme $\bar{\partial}$-fermée (c'est-à-dire une p-forme holomorphe).

(a) Montrer que $\pi^*\alpha$ s'étend en une forme $\bar{\partial}$-fermée $\beta \in \mathcal{A}^{p,0}(\mathbb{C}^{n+1})$.
(b) Montrer que β est homogène (c'est-à-dire que pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, si l'on note par $\gamma_\lambda(z) = \lambda z$ la dilatation de $\mathbb{C}^{n+1}$, alors $\gamma_\lambda^*\beta = \beta$).
(c) En écrivant $\beta = \sum_I f_I(z)\, dz_I$, montrer que cela implique $f \equiv 0$ sur $\mathbb{C}^{n+1}$.
(d) Conclure que $H^{p,0}_{\bar{\partial}}(\mathbb{P}^n) = 0$ si $p > 0$.

Exercice 12. Soit M une variété complexe compacte simplement connexe. Montrer que $H^{1,0}(M) = 0$. *Indication : étant donnée une 1-forme holomorphe α, on l'intègre le long de chemins à point de départ fixé afin de définir une application holomorphe $f : X \to \mathbb{C}$ avec $df = \alpha$.*

Exercice 13. Soit (M, J) une variété complexe. Pour toute 2-forme réelle J-invariante $\psi \in \mathcal{A}^{1,1}(M) \cap \mathcal{A}^2(M)$, vérifier que $b_\psi \in \Gamma((T^*M)^{\otimes 2})$, défini par

$$b_\psi(X, Y) = \psi(X, JY),$$

est bilinéaire, J-invariant et symétrique. On dit que ψ est positive si b_ψ est définie positive en chaque point.

(a) Sur $\mathbb{C}^n$, montrer que $\omega := \frac{i}{2}\sum_{j=1}^n dz_j \wedge d\bar{z}_j$ est positive ; en particulier que b_ω est la métrique standard sur $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$.
(b) Montrer que $\omega = \frac{1}{2}\mathrm{i}\partial\bar{\partial}r^2$ pour $r^2 = \sum_{j=1}^n |z_j|^2$.
(c) Plus généralement, pour un ouvert $U \subset \mathbb{C}^n$, vérifier que si $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ est une fonction strictement convexe, alors $\mathrm{i}\partial\bar{\partial}f$ est positive sur U.

Exercice 14. ★ Soit $E \to M$ un fibré vectoriel complexe de rang k sur M, dont les fonctions de transition par rapport à un recouvrement ouvert $(U_\alpha)_\alpha$ de M sont $(g_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta}$. Montrer qu'une section $\sigma : M \to E$ de E peut être identifiée à une famille $(\sigma_\alpha)_\alpha$ d'applications lisses $\sigma_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^k$ satisfaisant $\sigma_\alpha = g_{\alpha\beta}\,\sigma_\beta$ sur $U_\alpha \cap U_\beta$.

Exercice 15 (*Le fibré tautologique et le fibré hyperplan*)**.** ★★ Soit L le fibré en droites complexes $\pi : L \to \mathbb{P}^n$ dont la fibre L_x au-dessus d'un point $x \in \mathbb{P}^n$ est la droite complexe x dans $\mathbb{C}^{n+1}$. Soit L^* le fibré dual de L.

(i) Montrer que L est un fibré en droites holomorphe (*indication : utiliser les transitions locales*) et montrer que L n'admet pas de section holomorphe non triviale.

(ii) Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, montrer que la restriction à L_x permet de définir une section s_α de L^*. En conclure que l'espace des sections holomorphes globales de L^* est de dimension au moins $n+1$. Quel est le lieu d'annulation de s_α dans $\mathbb{P}^n$? Étant donné $k \geq 0$, interpréter tout polynôme homogène de degré k sur $\mathbb{C}^{n+1}$ comme une section de $(L^*)^{\otimes k}$.

Exercice 16. ★ Soit $\pi : E \to M$ un fibré vectoriel holomorphe de rang r. Pour un repère local de sections holomorphes $s_1, \ldots, s_k$ sur $U \subset M$, on définit $\bar{\partial}_E : \Gamma(\Lambda^{p,q} U \otimes E) \to \Gamma(\Lambda^{p,q+1} U \otimes E)$, par

$$\bar{\partial}_E \left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \otimes s_j \right) = \sum_{j=1}^{k} \bar{\partial} \alpha_j \otimes s_j.$$

(a) Montrer que $\bar{\partial}_E$ ne dépend pas du repère choisi et s'étend en un opérateur bien défini $\bar{\partial}_E : \Gamma(\Lambda^{p,q} M \otimes E) \to \Gamma(\Lambda^{p,q+1} M \otimes E)$.

(b) Montrer que $\bar{\partial}_E^2 = 0$.

(c) Quel groupe de cohomologie associé à ce complexe coïncide avec l'espace des sections holomorphes globales ?