

### DEVOIR 3. MÉTRIQUES KÄHLÉRIENNES ET FIBRÉS VECTORIELS HOLOMORPHES

Exercices avec ★ : remettre uniquement ces exercices (Exercices 4, 7, 8, 9, 10).

Exercices avec ★★ : pas à rendre, mais essayez de lire quelques références et de vous en convaincre.

Exercices sans ★ : ce sont des exercices standards ; si vous ne les connaissez pas, il est important de les apprendre.

**Exercice 1.** Soit  $(M, \omega)$  une variété kählérienne et  $f$  une fonction réelle de classe  $C^2$ , à support compact sur  $M$ . Montrer que pour  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  suffisamment petit,  $\omega + \varepsilon i \partial \bar{\partial} f$  est une métrique kählérienne sur  $M$ .

**Exercice 2.** Soit  $U \subset \mathbb{C}^n$  un ouvert et  $\omega = \frac{i}{2} \sum_{j,k=1}^n h_{j\bar{k}} dz_j \wedge d\bar{z}_k \in \mathcal{A}^{1,1}(U)$ . Montrer que  $\omega^n = (\frac{i}{2})^n \det(h_{j\bar{k}}) dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n$ .

**Exercice 3** (Lemme du  $\partial\bar{\partial}$  local). Soit  $\Delta \subset \mathbb{C}^n$  un polydisque. Étant donné une  $(1,1)$ -forme  $\alpha \in \mathcal{A}^{1,1}(\Delta) \cap \mathcal{A}_{\mathbb{R}}^2(\Delta)$ ,  $d\alpha = 0$ , montrer qu'il existe  $f \in C^\infty(\Delta)$  tel que  $\alpha = i\partial\bar{\partial}f$ .

**Exercice 4.** ★ Soit  $(M, J, \omega)$  une variété kählérienne compacte. Vérifier que les deux identités kählériennes suivantes sont équivalentes :

$$[\Lambda_\omega, \bar{\partial}] = -i\partial^* \quad [\bar{\partial}^*, L_\omega] = i\partial.$$

**Exercice 5.** Sur  $\mathbb{C}^n$  muni de sa métrique kählérienne standard et pour  $f \in C^2(\mathbb{C}^n, \mathbb{R})$ , vérifier que  $\Delta_d f$  est (à un facteur multiplicatif près) le Laplacien que vous avez appris en analyse complexe ou en cours d'EDP

**Exercice 6.** Soit  $(M, J, \omega)$  une variété kählérienne compacte. Montrer que  $\Delta_d, \Delta_\partial, \Delta_{\bar{\partial}}$  commutent avec  $*$ ,  $L_\omega, \Lambda_\omega, \partial, \partial^*, \bar{\partial},$  et  $\bar{\partial}^*$ .

**Exercice 7.** ★ Soit  $M$  une variété kählérienne compacte et  $\pi : L \rightarrow M$  un fibré en droites holomorphe muni d'une métrique hermitienne  $h$ , d'une connexion de Chern  $\nabla_h$  et de sa courbure  $F_{\nabla_h} \in \mathcal{A}^{1,1}(M) \cap \mathcal{A}_{\mathbb{R}}^2(M)$ .

- (1) Étant donné  $f \in C^2(M, \mathbb{R})$ , calculer la courbure de la connexion de Chern associée à la métrique hermitienne  $e^{-f}h$  en fonction de  $F_{\nabla_h}$  et de  $f$ .
- (2) En déduire que la classe de  $F_{\nabla_h}$  dans  $H_{\bar{\partial}}^{1,1}(M)$  ne dépend pas de  $h$ .
- (3) En utilisant le Lemme du  $\partial\bar{\partial}$ , montrer que toute forme dans la classe  $[F_{\nabla_h}]$  est la courbure d'une métrique hermitienne sur  $L$ .

**Exercice 8.** ★ Soit  $L \rightarrow M$  un fibré en droites holomorphe et  $L^{-1}$  son fibré dual. Étant donné une connexion  $\nabla$  sur  $L$ , on définit un opérateur  $\nabla^* : \Gamma(L^{-1}) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes L^{-1})$  en posant  $(\nabla_X^* \sigma)(s) = X(\sigma(s)) - \sigma(\nabla_X s)$  pour tout  $s \in \Gamma(L)$  et  $X \in \Gamma(TM)$ . Montrer que  $\nabla^*$  est une connexion sur  $L^{-1}$  et que  $F_{\nabla^*} = -F_{\nabla}$ .

**Exercice 9.** ★ Étant donné une variété complexe compacte  $M$  l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés en droites holomorphes sur  $M$ , muni du produit tensoriel, forme un groupe abélien  $\text{Pic}(M)$ . Montrer que l'application  $c_1 : \text{Pic}(M) \rightarrow H_{\bar{\partial}}^{1,1}(M)$  donnée par  $c_1(L) = [\frac{i}{2\pi} F_{\nabla_h}]$ , où  $h$  est une métrique hermitienne arbitraire sur  $L$ , est bien définie et un homomorphisme de groupes. En particulier,  $c_1(L^{\otimes k}) = kc_1(L)$ .

**Exercice 10** (Le fibré tautologique). ★ Soit  $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$  le fibré en droites tautologique  $\pi : L \rightarrow \mathbb{P}^n$  dont la fibre  $L_x$  au-dessus de  $x \in \mathbb{P}^n$  est la droite complexe  $x \in \mathbb{C}^{n+1}$ .

- (1) Vérifier que  $L$  est naturellement un sous-fibré holomorphe du fibré trivial  $\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$  et qu'ainsi la métrique hermitienne standard sur  $\mathbb{C}^{n+1}$  induit une métrique hermitienne sur  $L$ .
- (2) Calculer la courbure de Chern associée sur  $L$  et montrer qu'elle vaut  $-i\lambda\omega_{\text{FS}}$  pour une constante négative  $\lambda < 0$  (où  $\omega_{\text{FS}}$  désigne la métrique de Fubini–Study sur  $\mathbb{P}^n$ ).  
(Indication : vous pouvez consulter, par exemple, le livre de Voisin.)
- (3) En déduire que la courbure de la connexion de Chern induite sur le dual  $L^{-1} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$  est un multiple positif de la métrique de Fubini–Study (cf. Exercice 8).

**Exercice 11.** Soit  $M$  l'éclatement de  $\mathbb{C}^{n+1}$  à l'origine (voir Devoir 1). Donner un biholomorphisme entre  $M$  et l'espace total du fibré tautologique  $\mathbb{P}^n$ .

**Exercice 12.** Soient  $E_1$  et  $E_2$  deux fibrés vectoriels sur  $M$  munis respectivement des connexions  $\nabla^{E_1}$  et  $\nabla^{E_2}$ . Soient  $s_1$  et  $s_2$  des sections locales de  $E_1$  et  $E_2$ , respectivement. On définit

$$\nabla^{E_1 \oplus E_2}(s_1 \oplus s_2) = \nabla^{E_1}(s_1) \oplus \nabla^{E_2}(s_2), \quad \text{et} \quad \nabla^{E_1 \otimes E_2}(s_1 \otimes s_2) = \nabla^{E_1}(s_1) \otimes s_2 + s_1 \otimes \nabla^{E_2}(s_2).$$

- (1) Vérifier que  $\nabla^{E_1 \oplus E_2}$  et  $\nabla^{E_1 \otimes E_2}$  sont des connexions sur  $E_1 \oplus E_2$  et  $E_1 \otimes E_2$  respectivement.
- (2) Montrer que  $F_{\nabla^{E_1 \oplus E_2}} = F_{\nabla^{E_1}} \oplus F_{\nabla^{E_2}}$ , et  $F_{\nabla^{E_1 \otimes E_2}} = F_{\nabla^{E_1}} \otimes \text{Id}_{E_2} + \text{Id}_{E_1} \otimes F_{\nabla^{E_2}}$ .
- (3) En notant que  $\text{End}(E) = E \otimes E^*$ , en déduire que  $F_{\nabla^{\text{End}(E)}} = [F_{\nabla^E}, \bullet]$ .

**Exercice 13** (Section 4.A du livre de Huybrechts). ★★ Soit  $(M, J, \omega)$  une variété kählérienne. Montrer que la connexion de Chern  $\nabla^C$  sur  $T^{1,0}M$  correspond à la connexion de Levi-Civita  $\nabla^{\text{LC}}$  sur  $TM$  via l'isomorphisme  $TM \simeq T^{1,0}M$  induit par  $X \mapsto \frac{1}{2}(X - iJX)$ .

**Exercice 14** (Fibrés projectifs (vous pouvez suivre le section 3.3.2 du livre de Voisin)). ★★ Soit  $\pi : E \rightarrow M$  un fibré holomorphe de rang  $r + 1$  au-dessus d'une variété complexe compacte  $M$ , et notons  $E^\times := E \setminus \{\text{section nulle}\}$ . On définit  $\mathbb{P}(E)$  comme le quotient de  $E^\times$  par l'action naturelle de  $\mathbb{C}^*$  fibre à fibre.

- (1) Vérifier que l'application  $\pi$  se descend en une application bien définie  $\hat{\pi} : \mathbb{P}(E) \rightarrow M$  telle que  $\hat{\pi}^{-1}(p)$  coïncide avec l'ensemble des droites complexes de la fibre  $E_p = \pi^{-1}(p)$ . En particulier,  $\hat{\pi}^{-1}(p) \simeq \mathbb{P}^r$ .
- (2) Vérifier qu'un atlas holomorphe  $\{U_i\}_{i \in I}$  de  $M$  trivialisant  $E$  fournit des identifications  $\hat{\pi}^{-1}(U_i) \simeq U_i \times \mathbb{P}^r$ , et que les morphismes projectifs associés aux fonctions de transition de  $E$  induisent les fonctions de transition de l'atlas  $\{\hat{\pi}^{-1}(U_i)\}$  sur  $\mathbb{P}(E)$ .
- (3) En déduire que cela munit  $\mathbb{P}(E)$  d'une structure complexe pour laquelle  $\hat{\pi} : \mathbb{P}(E) \rightarrow M$  est holomorphe.
- (4) Considérer le fibré vectoriel holomorphe  $p : \hat{\pi}^*E \rightarrow \mathbb{P}(E)$ . Rappeler que la fibre de  $\hat{\pi}^*E$  en  $x \in \mathbb{P}(E)$  est  $E_{\hat{\pi}(x)}$ . Se convaincre que  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1) := \{\xi \in \hat{\pi}^*E \mid \xi \in p(\xi)\}$  est un fibré en droites holomorphe sur  $\mathbb{P}(E)$ , et montrer que, pour  $p \in M$ , la restriction (pullback) de  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1)$  à la fibre  $\mathbb{P}(E)_p = \hat{\pi}^{-1}(p) \simeq \mathbb{P}^r$  coïncide avec le fibré tautologique de  $\mathbb{P}^r$ .
- (5) Considérer maintenant une métrique hermitienne  $h$  sur  $E$ . Montrer qu'elle induit une métrique hermitienne, encore notée  $h$ , sur  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1)$ .
- (6) Montrer que la restriction de  $-F_{\nabla_h}$  à une fibre  $\mathbb{P}(E)_p$  est positive pour tout  $p \in M$ .
- (7) Conclure que si  $(M, \omega)$  est compacte et kählérienne, il existe  $\lambda > 0$  tel que  $\lambda \hat{\pi}^*\omega - F_{\nabla_h}$  soit une forme kählérienne sur  $\mathbb{P}(E)$ .

**Exercice 15** (Éclatements (vous pouvez suivre le section 3.3.3 du livre de Voisin)). ★★ Soit  $X$  une variété complexe de dimension  $n$  et  $Y \subset X$  une sous-variété complexe fermée de dimension  $m = n - k < n$ . On note  $\tilde{X}_Y$  l'éclatement de  $X$  le long de  $Y$  avec l'application de contraction  $\pi : \tilde{X}_Y \rightarrow X$  (voir la feuille d'exercices 1).

- (1) On note  $\iota : Y \hookrightarrow X$  l'inclusion. Montrer que le fibré normal  $N_{Y/X} := \iota^*TX/TY$  est un fibré holomorphe au-dessus de  $Y$  (c'est un fait standard que le quotient d'un fibré vectoriel holomorphe par un sous-fibré holomorphe est encore holomorphe).
- (2) Soit  $U \subset X$  un ouvert tel que  $U \cap Y = Z(f_1^U) \cap \dots \cap Z(f_k^U)$ , où  $f^U = (f_1^U, \dots, f_k^U) : U \rightarrow \mathbb{C}^k$  est holomorphe (et 0 est une valeur régulière). Montrer que  $\{df_i\}_{i=1, \dots, k}$  fournit un repère du fibré dual du fibré normal au-dessus de  $U \cap Y$ .
- (3) Supposons  $k = 1$ . Montrer qu'il existe un fibré en droites  $L \rightarrow X$  qui est trivial sur  $X \setminus Y$  et qui coïncide avec le fibré dual du fibré normal  $N_{Y/X}$  au-dessus de  $Y$ . (*Indication : utiliser les cocycles de transition.*)
- (4) Montrer que  $\pi^{-1}(Y) \simeq \mathbb{P}(N_{Y/X})$  en tant que variétés complexes.
- (5) Montrer que  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N_{Y/X})}(-1) \simeq N_{\pi^{-1}(Y)/\tilde{X}_Y}$  en tant que fibrés holomorphes au-dessus de  $\pi^{-1}(Y)$ .
- (6) Se convaincre que  $\pi^{-1}(Y)$  est une sous-variété complexe fermée de codimension complexe 1 dans  $\tilde{X}_Y$ . En utilisant (3), montrer qu'il existe un fibré en droites  $\mathcal{L} \rightarrow \tilde{X}_Y$  dont la restriction à  $\pi^{-1}(Y)$  coïncide avec  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N_{Y/X})}(-1)$ .
- (7) En utilisant (6), et en supposant  $(X, \omega)$  compacte kählérienne, montrer qu'il existe une métrique hermitienne  $h$  sur  $\mathcal{L}^{-1}$  et  $\lambda > 0$  tels que  $F_{\nabla_h} + \lambda \pi^*\omega$  soit une forme kählérienne sur  $\tilde{X}_Y$ .