EXERCICES 4

Exercices à pratiquer, à réfléchir et à lire – pas besoin de les rendre.

1. Faisceaux et cohomologie de Čech

Exercice 1. Soit $\mathscr{A}_M^{p,q}$ le faisceau des formes différentielles lisses de type (p,q) sur une variété complexe compacte M. Montrer que $\check{H}^i(M, \mathscr{A}_M^{p,q}) = 0$ pour tout $i > 0$.

Exercice 2. Soit $N \subset M$ une sous-variété complexe et $\mathscr{F}$ un faisceau sur N. Montrer que l'application $U \mapsto \mathscr{F}_N(U) := \mathscr{F}(U \cap N)$ définit un faisceau sur M.

Exercice 3. Vérifier les propriétés suivantes concernant le faisceau associé au préfaisceau :

(1) Vérifier que la définition du faisceau associé à un préfaisceau est bien un faisceau.
(2) Sur une variété complexe, vérifier que le faisceau associé à l'image de $\exp(2\pi i \bullet) : \mathcal{O} \to \mathcal{O}^*$ est égal à $\mathcal{O}^*$.

Exercice 4. Soit M une variété complexe compacte.

(1) Montrer que $\check{H}^1(M, \mathcal{O}^*)$ décrit les classes d'isomorphisme de fibrés en droites holomorphes sur M.
(2) Montrer que
$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O} \xrightarrow{e^{2\pi i \cdot}} \mathcal{O}^* \to 1$$
est une suite exacte courte de faisceaux, et vérifier qu'elle induit la suite exacte longue
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \check{H}^0(M,\mathbb{Z}) \arrow[r] & \check{H}^0(M,\mathcal{O}) \arrow[r] & \check{H}^0(M,\mathcal{O}^*) \arrow[dll, rounded corners, to path={ -- ([xshift=2ex]\tikztostart.east) |- node[near end, above]{\scriptstyle \delta^*} ([yshift=1.5ex]\tikztotarget.north) -| ([xshift=-2ex]\tikztotarget.west) -- (\tikztotarget)}] \\
 & \check{H}^1(M,\mathbb{Z}) \arrow[r] & \check{H}^1(M,\mathcal{O}) \arrow[r] & \check{H}^1(M,\mathcal{O}^*) \arrow[dll, rounded corners, to path={ -- ([xshift=2ex]\tikztostart.east) |- node[near end, above]{\scriptstyle \delta^*} ([yshift=1.5ex]\tikztotarget.north) -| ([xshift=-2ex]\tikztotarget.west) -- (\tikztotarget)}] \\
 & \check{H}^2(M,\mathbb{Z}) \arrow[r] & \check{H}^2(M,\mathcal{O}) \arrow[r] & \check{H}^2(M,\mathcal{O}^*) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$
(3) Montrer que la composition des applications
$$\check{H}^1(M,\mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta^*} \check{H}^2(M,\mathbb{Z}) \hookrightarrow \check{H}^2(M,\mathbb{R}) \simeq H^2_{\mathrm{dR}}(M,\mathbb{R})$$
correspond à la première classe de Chern des fibrés en droites holomorphes.

Exercice 5 (Théorème de Dolbeault)**.** Soit M une variété complexe compacte et soit E un fibré vectoriel holomorphe sur M. On note Ω^p le faisceau des p-formes holomorphes sur M, et $\Omega^p(E)$ le faisceau des p-formes holomorphes à valeurs dans E. Montrer que la cohomologie de Čech $\check{H}^q(M, \Omega^p(E))$ est isomorphe à la cohomologie de Dolbeault $H^{p,q}(M,E)$.

Exercice 6. Soit Ω^p le faisceau des p-formes holomorphes sur $\mathbb{P}^n$. Montrer que
$$\check{H}^q(\mathbb{P}^n, \Omega^p) \simeq \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } q = p \leq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 7. Soit $M = \mathbb{P}^n$ et soient $p, q \in M$ deux points distincts. On note $\mathcal{O}(-p-q)$ le faisceau des fonctions holomorphes sur M qui s'annulent en p et en q. Montrer qu'il existe une suite exacte courte de faisceaux
$$0 \to \mathcal{O}(-p-q) \to \mathcal{O} \to \mathbb{C}_p \oplus \mathbb{C}_q \to 0$$
où les faisceaux du membre de droite doivent être définis avec soin. Montrer que l'application $\check{H}^0(M,\mathcal{O}) \to \check{H}^0(M, \mathbb{C}_p \oplus \mathbb{C}_q)$ n'est pas surjective et en déduire que $\check{H}^1(M, \mathcal{O}(-p-q)) \neq 0$.

Exercice 8. Montrer que tout fibré en droites holomorphe sur un disque est trivial. En déduire que tout fibré en droites holomorphe sur $\mathbb{P}^1$ est de la forme $\mathcal{O}(n)$ pour un certain entier n.

Exercice 9. Montrer que $\check{H}^q(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}) = 0$ et $\check{H}^q(\mathbb{C}^n, \mathbb{Z}) = 0$ pour tout $q > 0$. En utilisant la suite exacte courte de faisceaux exponentielle, en déduire que $\check{H}^q(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}^*) = 0$ pour tout $q > 0$. Conclure alors qu'une hypersurface analytique de $\mathbb{C}^n$ est le lieu des zéros d'une fonction entière.

2. Un peu d'analyse

Quelques références pour vous :

- Gilbarg–Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*
- Aubin, *Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry*

Exercice 10. Soit (M, J, ω) une variété kählérienne compacte de dimension n. Pour toute fonction $\varphi \in C^2(M)$, on définit

$$\Delta_\omega \varphi \underset{loc}{:=} \sum_{1\leq\alpha,\beta\leq n} g^{\alpha\bar{\beta}} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta}$$

où $\omega \underset{loc}{=} \sum_{1\leq\alpha,\beta\leq n} g_{\alpha\bar{\beta}} \mathrm{i} \mathrm{d}z_\alpha \wedge \mathrm{d}\bar{z}_\beta$.

(1) Montrer que Δ_ω est un opérateur elliptique de second ordre.
(2) Montrer que $\Delta_\omega = -c\Delta_{\bar{\partial}}$ pour une certaine constante $c > 0$.
(3) Montrer que

$$\Delta_\omega \varphi = \frac{n\mathrm{i}\partial\bar{\partial}\varphi \wedge \omega^{n-1}}{\omega^n}.$$

(4) Montrer que si φ est une fonction C^2 telle que $\Delta_\omega\varphi = 0$, alors φ est constante.

Exercice 11. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné et soit $\varphi \in C^2(\Omega)$. Montrer que si $\Delta\varphi \geq 0$ (sous-harmonique), alors φ satisfait l'inégalité de moyenne:

$$\varphi(x) \leq \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \varphi(y)\mathrm{d}y$$

pour tout $x \in \Omega$ et tout $0 < r < \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$.

Exercice 12. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné.

(1) Montrer que pour toute fonction $f \in C^{k,\alpha}(\Omega)$, f est de classe C^k.
(2) Montrer que $C^{k,\alpha}(\Omega)$ est complet (c'est-à-dire qu'une suite de Cauchy dans $C^{k,\alpha}(\Omega)$ est convergente dans $C^{k,\alpha}(\Omega)$).
(3) Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans $C^{k,\alpha}(\Omega)$. Supposons qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $\|f_k\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \leq M$ pour tout k. En utilisant le théorème d'Ascoli–Arzelà, montrer que pour tout $(\ell, \beta) \in \mathbb{N} \times (0, 1)$ tel que $\ell + \beta < k + \alpha$, il existe une sous-suite $(f_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $C^{\ell,\beta}(\Omega)$.

Exercice 13. Let Ω be a bounded domain in $\mathbb{R}^n$.

(1) (Inégalité de Sobolev) Montrer que pour $1 \leq p < n$, il existe une constante $C_S > 0$ telle que pour toute fonction $f \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\|f\|_{L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)} \leq C_S \|\nabla f\|_{L^p(\Omega)}.$$

(2) (Inégalité de Poincaré) Montrer que pour tout $1 \leq p < +\infty$, il existe une constante $C_P > 0$ telle que pour toute fonction $f \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq C_P \|\nabla f\|_{L^p(\Omega)}$$

(3) (Inégalité de Poincaré–Wirtinger) Montrer que pour tout $1 \leq p < +\infty$, il existe une constante $C'_P > 0$ telle que pour toute fonction $f \in C^\infty(\Omega)$,

$$\|f - f_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq C'_P \|\nabla f\|_{L^p(\Omega)}$$

où $f_\Omega := \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(x)\mathrm{d}x$.

(4) Réfléchir à la version des inégalités ci-dessus sur les variétés riemanniennes compactes.

Exercice 14 (Théorème de régularité elliptique)**.** Soit (M, g) une variété riemannienne compacte orientée et soit L un opérateur elliptique de second ordre à coefficients lisses (non nécessairement autoadjoint). Montrer que pour tout $(k, \alpha) \in \mathbb{N} \times (0, 1)$,

$$L : (\ker L)^{\perp_{L^2}} \cap C^{k+2,\alpha}(M) \to (\ker L^*)^{\perp_{L^2}} \cap C^{k,\alpha}(M)$$

est un isomorphisme, où L^* est l'opérateur adjoint de L, c.-à-d. $\int L(f_1)f_2 \,\mathrm{dvol}_g = \int_M f_1 L^*(f_2) \,\mathrm{dvol}_g$.